# Physique et modélisation numérique de la turbulence

**Stéphane VINCENT (Professeur - MSME)**

**Stephane.vincent@u-pem.fr – 01 60 95 73 07**

**Equipe Transferts de Chaleur et de Matière (TCM)**

**Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle (MSME)**

# Introduction

• **Turbulence dans les fluides :** l'une des physiques les plus complexes à étudier et caractériser

grand nombre de degrés de liberté

les structures potentiellement observées dans des écoulements 3D augmente fortement avec les dimensions spatiales

turbulence 3D en général, existe aussi en 2D (pas la même turbulence) pour écoulements stratifiés (météorologie, océanographie, …)

vitesse caractéristique et viscosité du fluide sont des facteurs aggravants qui sont mis en lumière par le nombre de Reynolds

la plupart des écoulements réels sont turbulents à grande échelles ou à grande vitesse dans les applications industrielles, environnementales, …

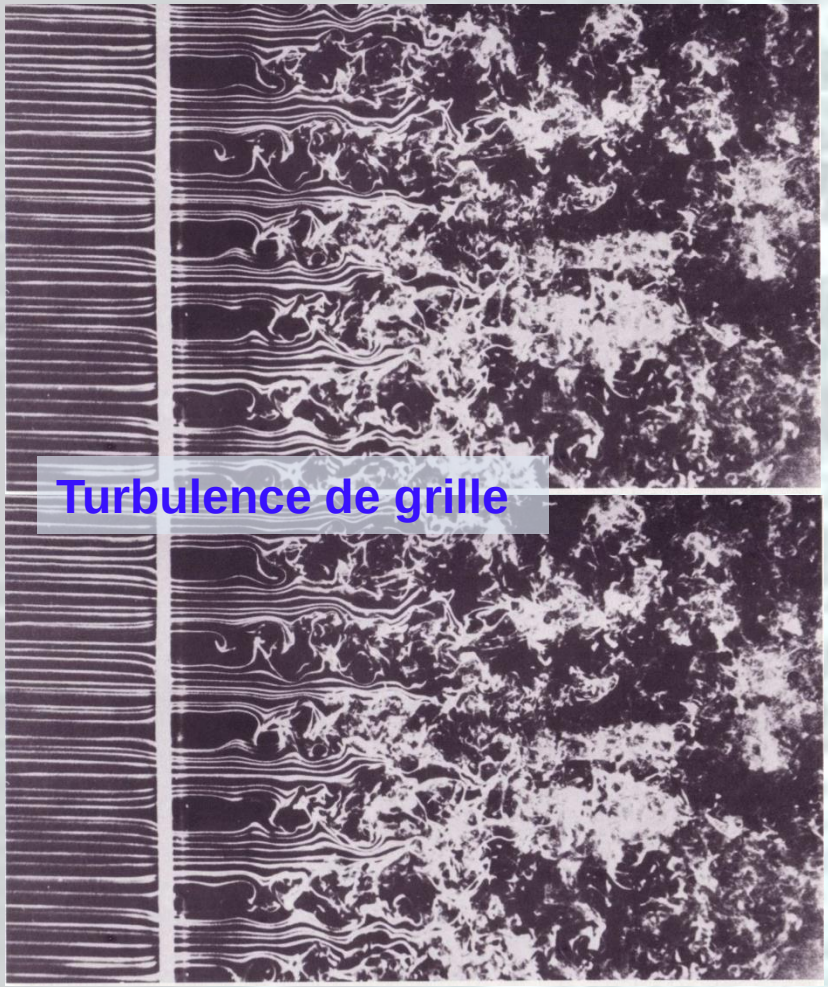
**Voir partie M. Ould-Rouiss** (concept généraux, notations, modèles RANS, …)

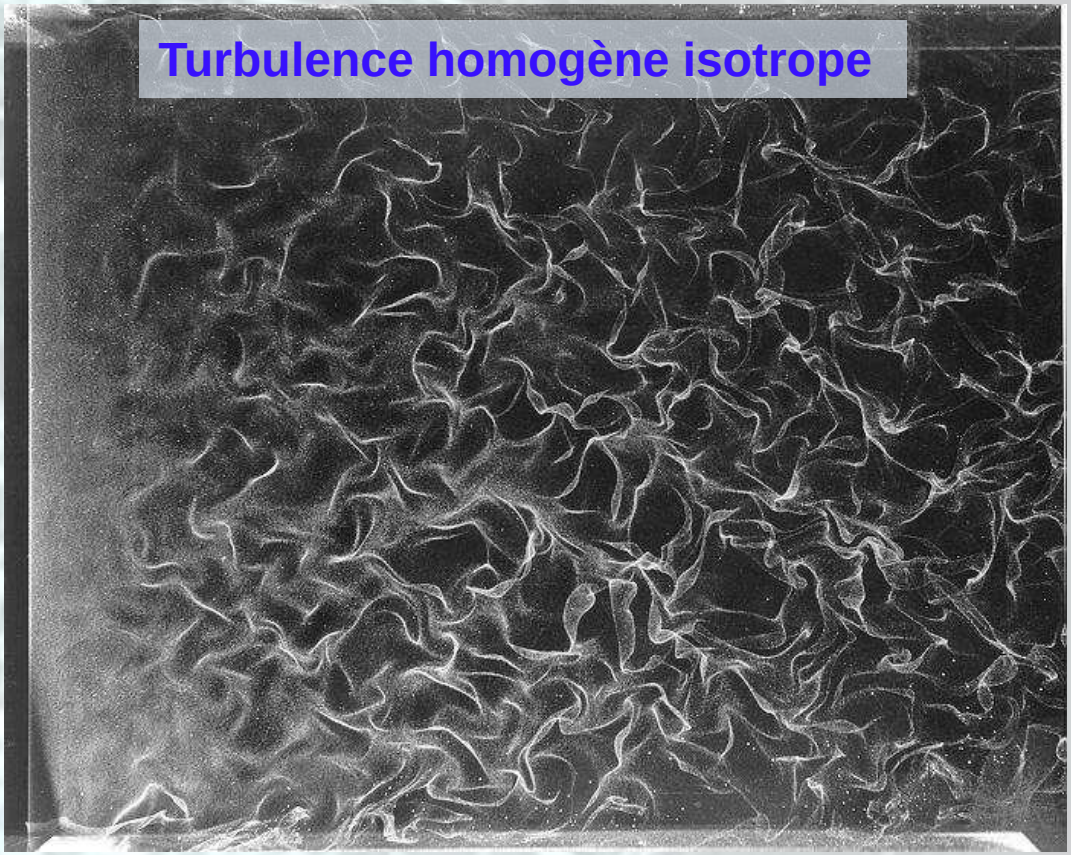
**TP sur canal turbulent et convection naturelle**

# Introduction - physique

- **Caractères généraux de la turbulence**

**Aléatoire, hasardeux :** non-structuré et instationnaire => dit aléatoire

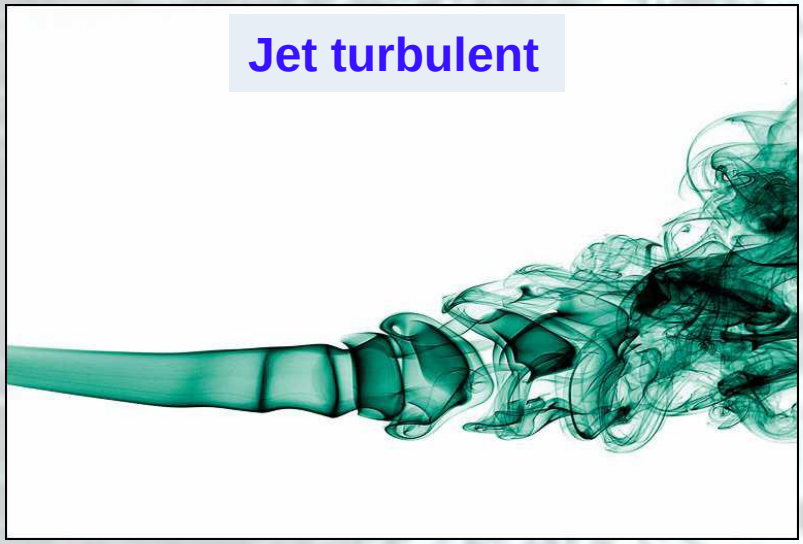


# Introduction - physique

- **Caractères généraux de la turbulence**

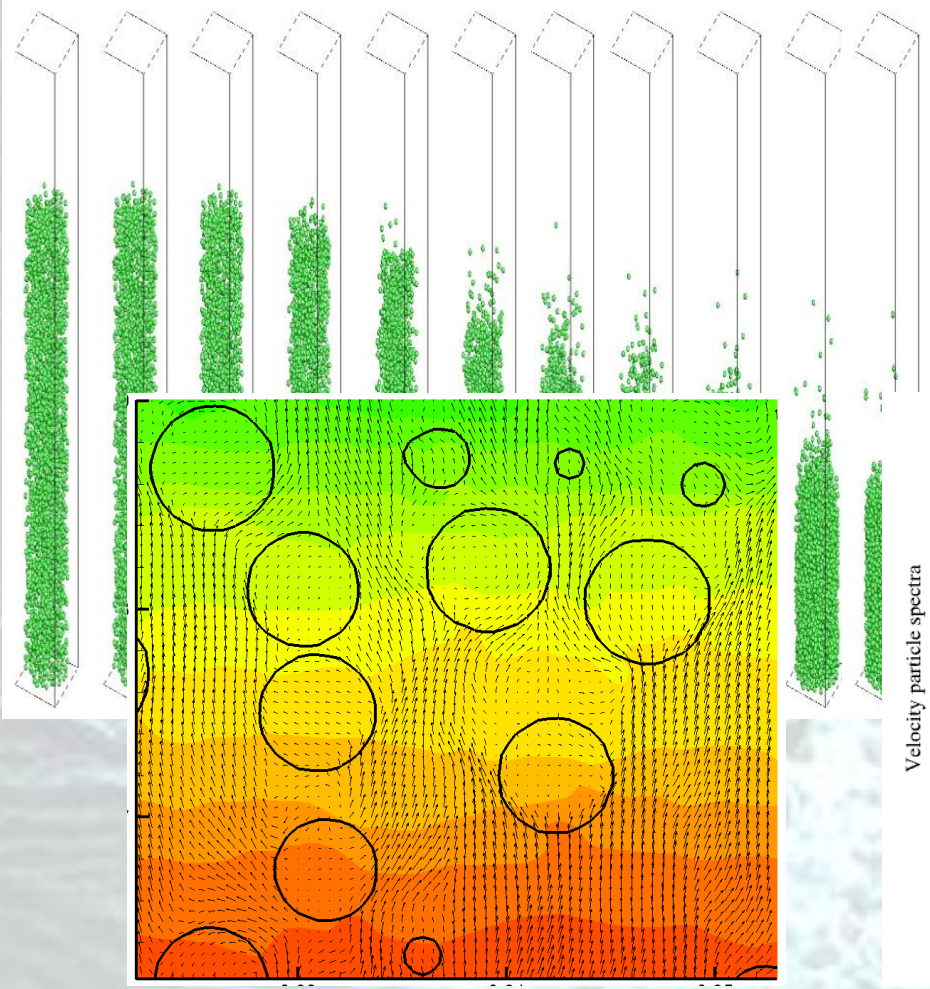
**Aléatoire, hasardeux : non-structuré et instationnaire => dit aléatoire**

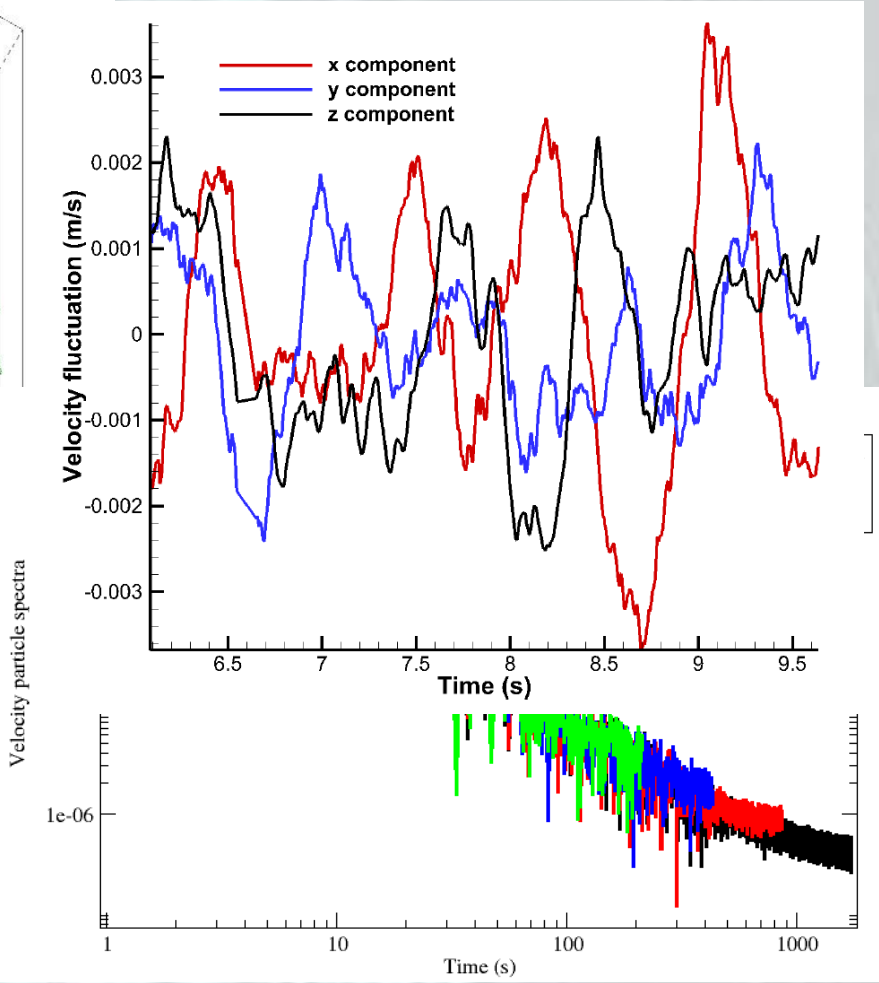


# Introduction - physique

- **Caractères généraux de la turbulence**

**Aléatoire, hasardeux : non-structuré et instationnaire => dit aléatoire**

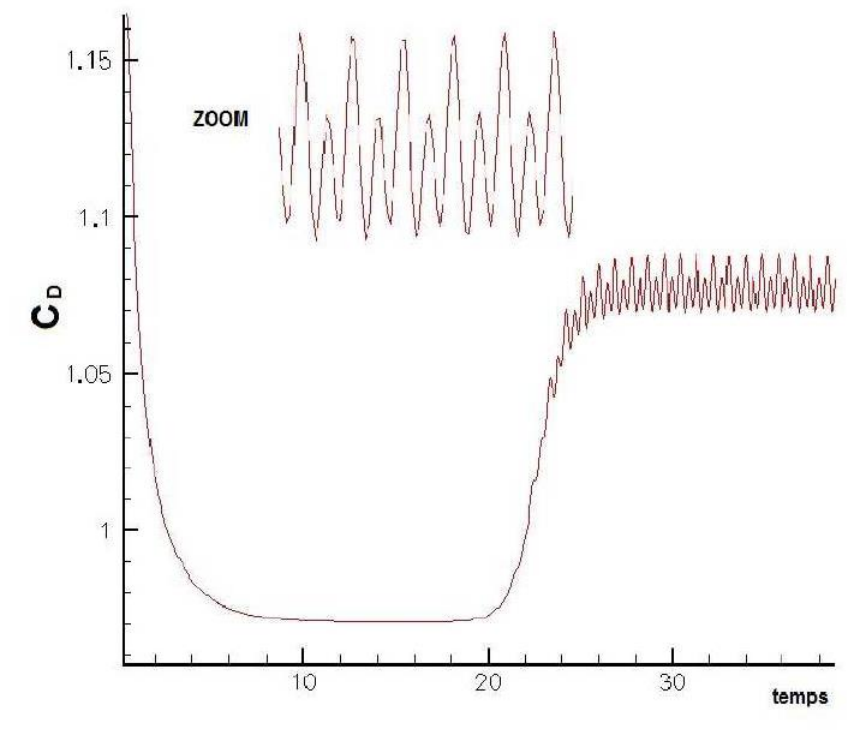


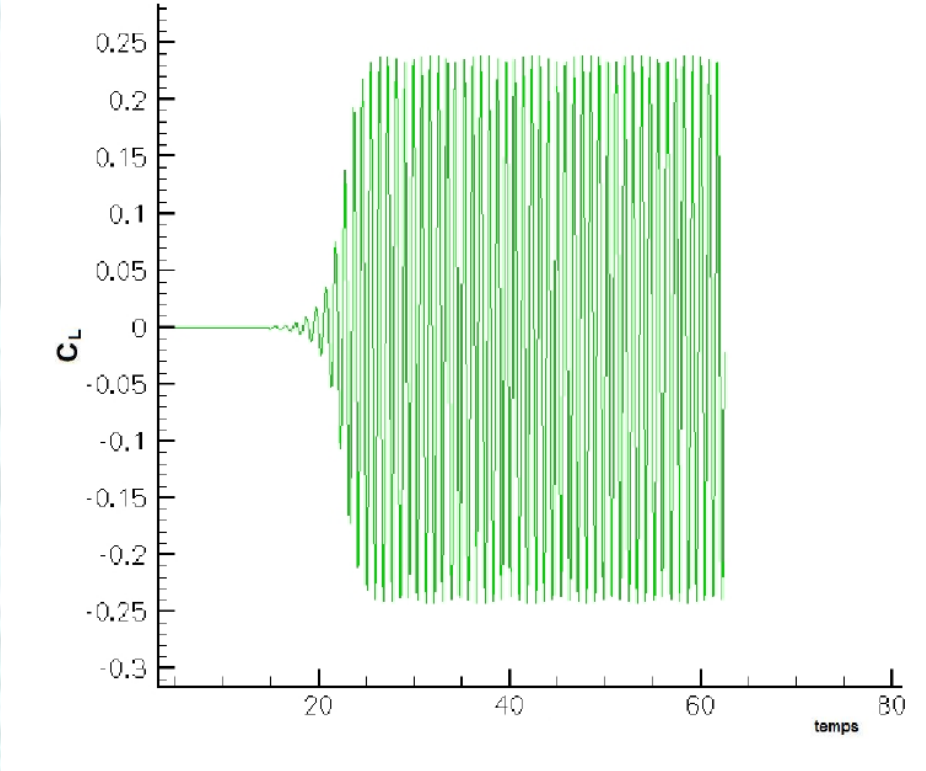


# Introduction - physique

- **Caractères généraux de la turbulence**

**Aléatoire, hasardeux : structuré et instationnaire = laminaire**

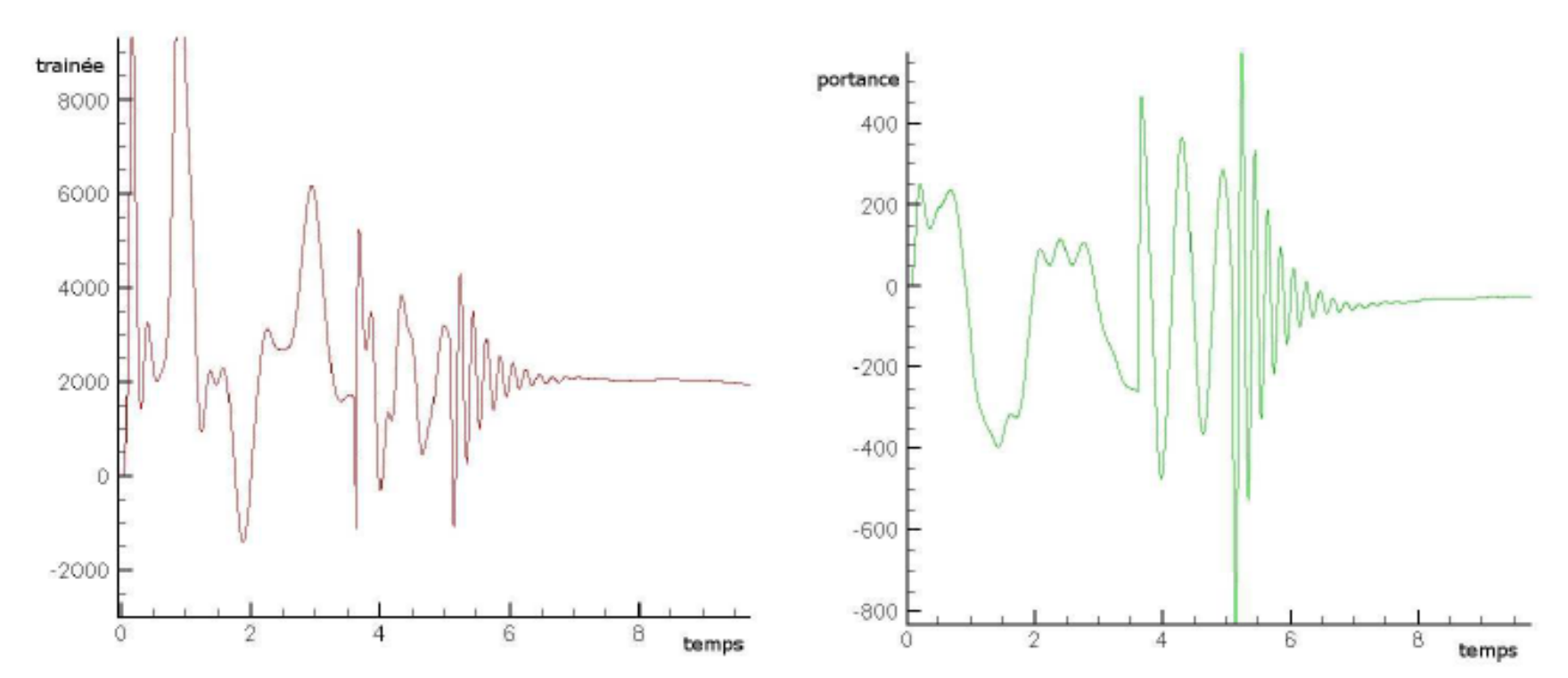


# Introduction - physique

- **Caractères généraux de la turbulence**

**Aléatoire, hasardeux : instationnaire mais champs moyens valeurs asymptotiques**



# Introduction - physique

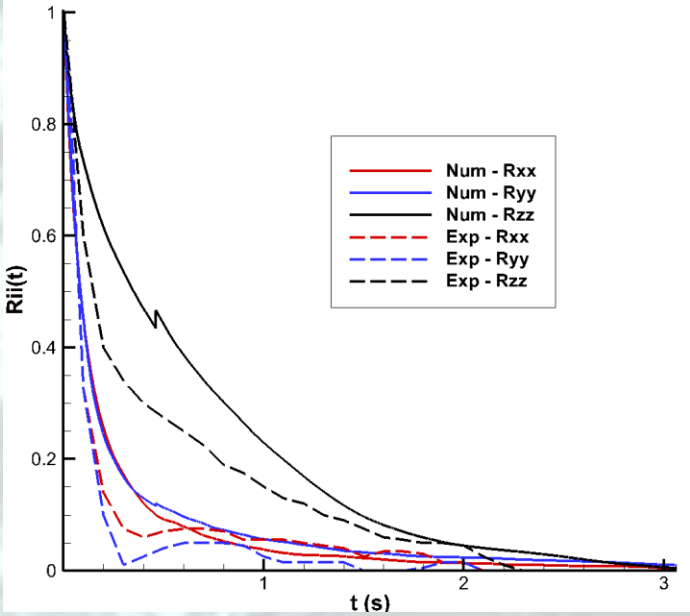
- Caractères généraux de la turbulence

**Forte sensibilité aux conditions initiales :** lié à l'interaction entre les petites échelles et l'écoulement moyen. Une petite variation des conditions initiales peut conduire à un état au temps longs très différent.

Exemple en météorologie qui rend les prévisions complexes et parfois peu sures.

Pour traiter précisément un écoulement turbulent, il faut résoudre des échelles très variables et aussi connaitre parfaitement les conditions initiales (impossible pour les problèmes réels).

**Perte de mémoire :** un écoulement turbulent, après avoir atteint un certain régime, oublie les détails qui l'on amené à cet état. On peut simuler un écoulement turbulent (caractéristiques moyennes) correctement sans connaitre les conditions initiales.



# Introduction - physique

- Caractères généraux de la turbulence

**Une forte diffusivité apparente :** la diffusivité turbulente est très supérieure à la diffusivité moléculaire

$\nu_t$=10 à 1000 fois $\nu_m$

Fortes variations spatiales et temporelles entrainent un mélange grand et donc un équivalent d'un processus de diffusion « turbulent ».

Seule la diffusion moléculaire dissipe réellement l'énergie à petite échelle. La diffusion turbulente ne dissipe l'énergie, elle la distribue et la transfère entre différentes zones de l'écoulement.

Ce que l'on à du mal à analyser en physique est en général assimilé à de la diffusion car c'est un processus régularisant qui lisse les gradients et modélise le caractère stable et cohérents des mécanismes, mêmes a priori aléatoires comme la turbulence.

Il faut faire attention aux phénomènes réels instationnaires à petite échelle et à ceux moyens ou à grande échelle (caractère diffusif).

# Introduction - physique

- **Caractères généraux de la turbulence**

**Coexistence d'échelles spatiales très différentes : turbulence = enchevêtrement de structures tourbillonnaires.**

**Spectre étendu de taille de tourbillons et de fréquences caractéristiques (spectre plein contrairement à un phénomène ondulatoire déterministe comme un sinus).**

**Gros tourbillons influencés par les conditions limites (échelle intégrale $L_f$) alors que les petits tourbillons sont associées aux hautes fréquences et aux petites échelles de l'écoulement (échelle de Kolmogorov $\eta_f$). Leur taille est déterminée par la viscosité moléculaire et ce sont eux qui dissipent l'énergie turbulente (1/2 $u'^2$).**

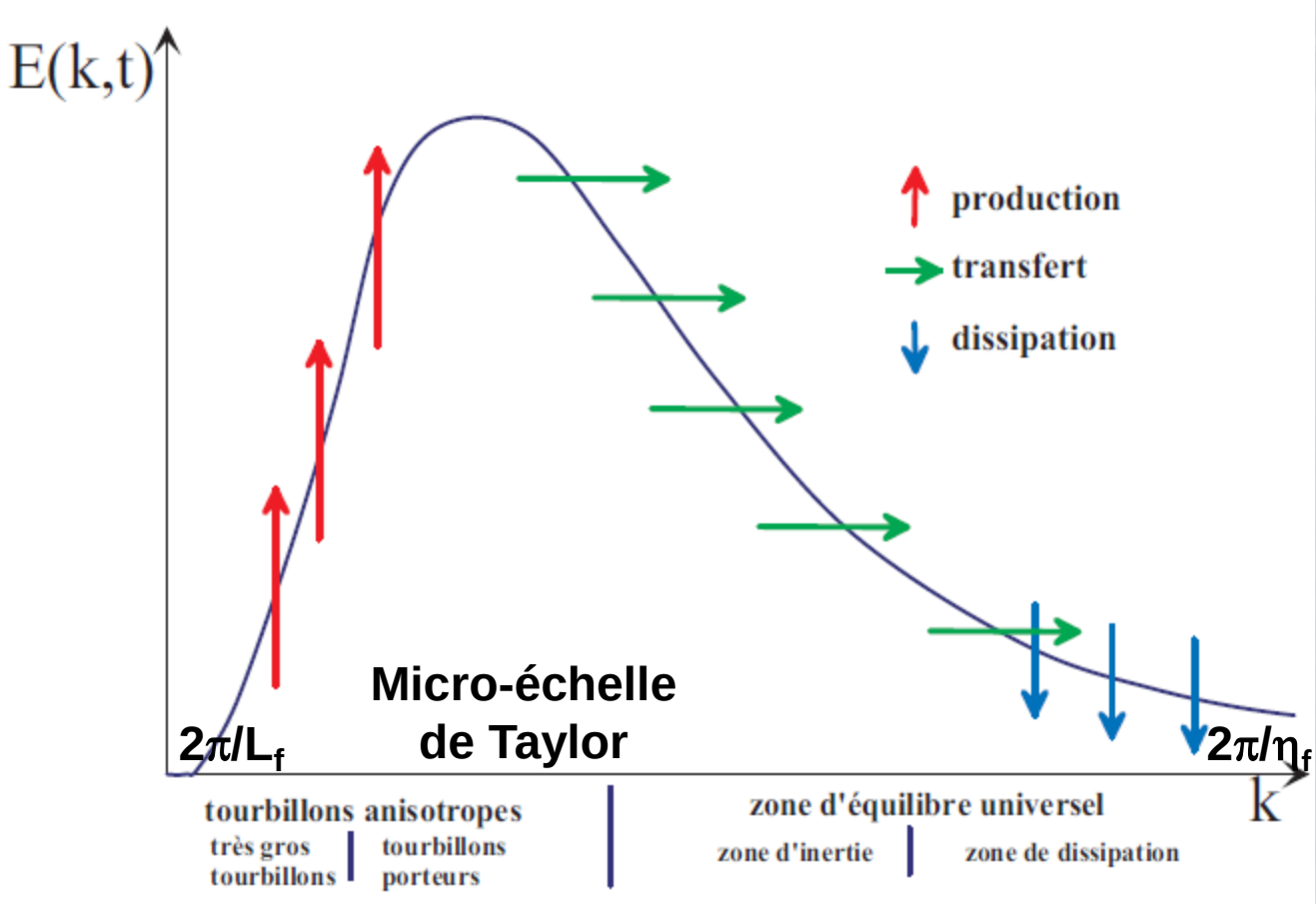
**L'écart entre échelle intégrale et de Kolmogorov augmente avec le nombre de Reynolds.**

**Plus Re augmente, plus la largeur du spectre augmente ($L_f/\eta_f$ augmente) et plus on trouve des structures fines pour une taille de problème macroscopique (échelle intégrale) donnée.**

# Introduction - physique

- Caractères généraux de la turbulence

**Coexistence d'échelles spatiales très différentes : on peut estimer les échelles caractéristiques de la turbulence.**



# Introduction - physique

- Caractères généraux de la turbulence

Echelles caractéristiques de la turbulence : définition de Chassaing (2000), Moreau (2005)

« L'écoulement turbulent est un mode naturel de mouvement de fluides visqueux où des mécanismes internes d'échanges énergétiques assurent, au sein même de l'écoulement, la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continûment sur une large gamme d'échelles macroscopiques. »

Vitesse réelle $\mathbf{u}_f(\mathbf{x},t) = \mathbf{U}_f(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}'_f(\mathbf{x},t)$ $\quad <\mathbf{u}'_f(\mathbf{x},t)>=0$

Energie cinétique turbulente $q_f^2(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2} <\mathbf{u}'_{f,i}(\mathbf{x},t)\mathbf{u}'_{f,i}(\mathbf{x},t)>= k$

Vitesse caractéristique de la turbulence $\mathbf{u}'_{f,i}(\mathbf{x},t) = \sqrt{\frac{2}{3} q_f^2(\mathbf{x},t)}$

Tenseur des corrélations spatiales eulériennes des vitesses fluides en deux points séparés de r

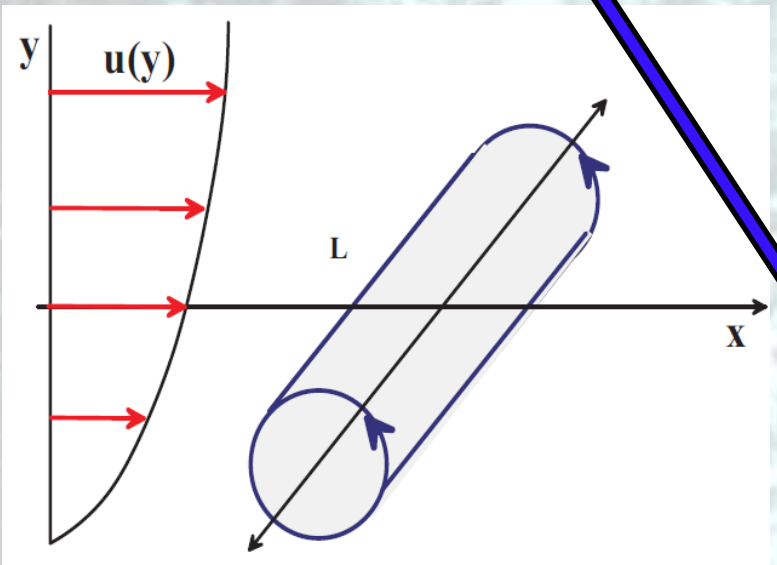
$$R_{f,ij}^E(\mathbf{r},t) = \frac{<\mathbf{u}'_{f,i}(\mathbf{x},t)\mathbf{u}'_{f,j}(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)>}{2q_f^2(\mathbf{x},t)}$$

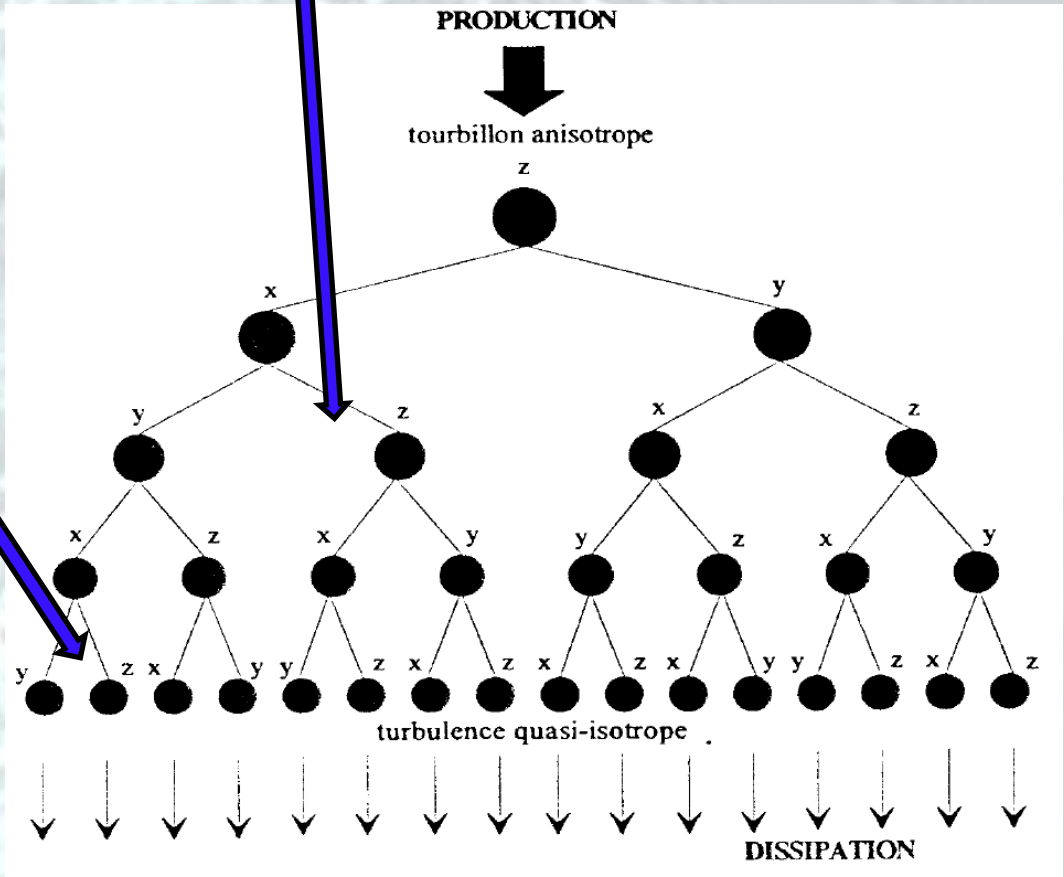
# Introduction - physique

- Caractères généraux de la turbulence

Cascade d'énergie due à l'échange entre les tourbillons : transfert d'énergie des grosses structures vers les plus petites (cascade d'énergie de Kolmogorov)

Isotropie de la microstructure de la turbulence



# Introduction - physique

- **Caractères généraux de la turbulence**

**Cascade d'énergie due à l'échange entre les tourbillons : le bilan des tourbillons étirés (ou compressés) accumulés à chaque étape du processus de Bradshaw montre l'oubli de la condition initiale au niveau des plus petits tourbillons.**

**Etat isotrope quasi-universel (voir courbe de Pope).**

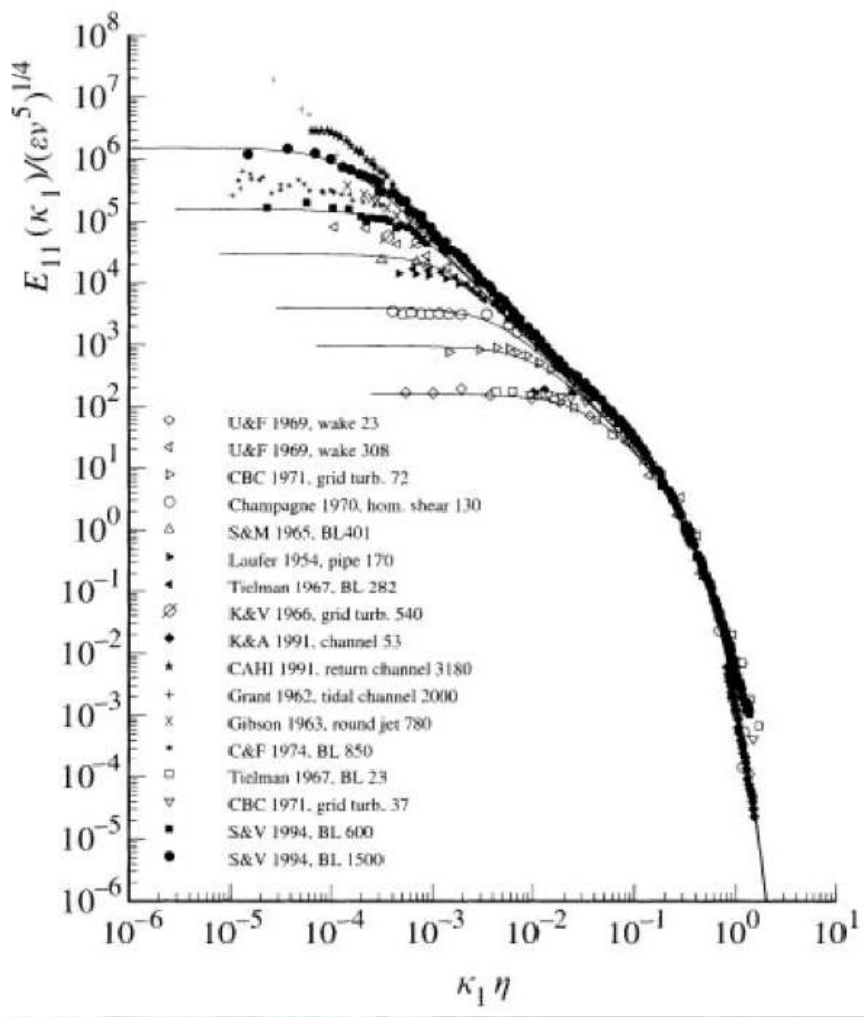
**N'est pas complètement indépendant des conditions initiales de déformation (pour k par exemple)**

| degré d'avancement | nombre de tourbillons étirés | | | nombre de tourbillons étirés cumulés | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| direction | — Ox —- | —- Oy — | —- Oz — | —- Ox —- | —- Oy —- | —- Oz — |
| départ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 ère génération | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2ème génération | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3ème génération | 3 | 3 | 2 | 5 | 5 | 5 |
| 4ème génération | 5 | 5 | 6 | 10 | 10 | 11 |
| 5ème génération | 11 | 11 | 10 | 21 | 21 | 21 |
| 6ème génération | 21 | 21 | 22 | 42 | 42 | 43 |
| 7ème génération | 43 | 43 | 43 | 85 | 85 | 85 |

# Introduction - physique

- Caractères généraux de la turbulence

Cascade d'énergie due à l'échange entre les tourbillons : synthèse de Pope dans « Turbulent flows ».




k= énergie cinétique turbulente

$\varepsilon$ = dissipation

$\eta$ = échelle de Kolmogorov

$$E(k) = \alpha\, \epsilon^{2/3}\, k^{-5/3}$$

# Modélisation

## Modélisation : concept de base et différentes approches : transfert

- **La modélisation statistique (RANS, Reynolds Averaged Navier-Stokes equations):** les champs de vitesse, pression sont décomposés en valeurs moyennes et fluctuation puis les concepts classiques en statistique conduisent à considérer des moyennes d'ensembles. Les corrélations d'ordre deux ou supérieures sont ensuite identifiées par la phase de fermeture et un système d'équations sur les quantitées moyennées est alors construit.
- **La Simulation Numérique Directe (DNS, Direct Numerical Simulation) :** cette approche est basée sur la représentativité de l'équation de Navier-Stokes qui contient l'essentiel de la physique des phénomènes observés. La résolution numérique avec des échelles spatiales et temporelles adaptées permet d'accéder à toutes les informations locales pour pouvoir réaliser des moyennes.
- **La Simulation des Grandes Echelles (LES, Large Eddy Simulation) :** La simulation des grandes échelles est une approche intermédiaire entre les deux précédentes qui consiste à séparer les grandes structures qui sont simulées directement des petites échelles, dites échelles de sous-maille qui sont modélisées. Elle a l'avantage de représenter les grandes structures instationnaires avec des ressources informatiques limitées.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### 8.4.1 Position du problème

La résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires implique, si l'on désire assurer une qualité maximale du résultat, de prendre en compte la dynamique de toutes les échelles spatio-temporelles de la solution. Pour représenter numériquement la totalité de ces échelles, il est nécessaire que les pas de discrétisation en espace et en temps de la simulation soient respectivement plus petits que la longueur caractéristique et le temps caractéristique associés à la plus petite échelle dynamiquement active de la solution exacte. La résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires a beaucoup progressé grâce à l'augmentation rapide de la capacité des calculateurs. Deux approches distinctes coexistent :

- La simulation numérique directe (ou Direct Numerical Simulation, DNS) résout toutes les échelles de l'écoulement et ne pose aucune hypothèse sur la modélisation de l'écoulement autre que celle des lois de comportement du fluide. Cette méthode impose l'utilisation d'un maillage très fin pour pouvoir capter toutes les échelles de la solution : la taille de la maille doit être plus petite que les échelles dissipatives pour les champs dynamique et thermique (respectivement nommés échelles de Kolmogorov et de Batchelor). Etant donné le nombre très élevé de points du maillage nécessaire à la réalisation d'une simulation directe d'un écoulement turbulent, ce type de simulation est restreint à des nombres de Reynolds faibles et à des géométries simples.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

- La simulation des grandes échelles (ou Large Eddy Simulation, LES) semble donc être une solution intermédiaire, permettant à moindre coût d'accéder à des informations instationnaires. Ce type de simulation ne résout que les grandes échelles régissant la dynamique de l'écoulement, les petites échelles étant modélisées par un modèle dit de "sous-maille". Cette technique permet d'effectuer des simulations sur des maillages plus grossiers qui ne captent pas les petites échelles dissipatives de l'écoulement. La séparation entre les échelles résolues et les échelles modélisées est formalisée mathématiquement par l'application d'un filtre aux équations de Navier-Stokes, et permet d'introduire la notion d'échelle de coupure.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### 8.4.2 Principe de la simulation des grandes échelles

La sélection entre grandes et petites échelles qui est à la base de la technique de simulation des grandes échelles implique la définition de ces deux catégories soumises à la détermination d'une longueur de référence, dite longueur de coupure : sont appelées grandes échelles, ou échelles résolues, celles qui sont d'une taille caractéristique plus grande que la longueur de coupure, et petites échelles ou échelles de sous-maille les autres. Ces dernières seront prises en compte par le biais d'un modèle statistique, appelé modèle de sous-maille. Le principe de la simulation des grandes échelles est donc d'isoler volontairement les grandes échelles du reste de l'écoulement grâce à une technique de filtrage spatial passe-bas en fréquence. Ainsi, les grandes structures porteuses de l'énergie sont calculées complètement. Les termes supplémentaires, dits de sous-maille, apparus après filtrage des équations, et qui représentent les interactions entre les petites strutures et les grands tourbillons, sont modélisés en introduisant des hypothèses de fermeture pour le système d'équations filtrées.

# Modélisation

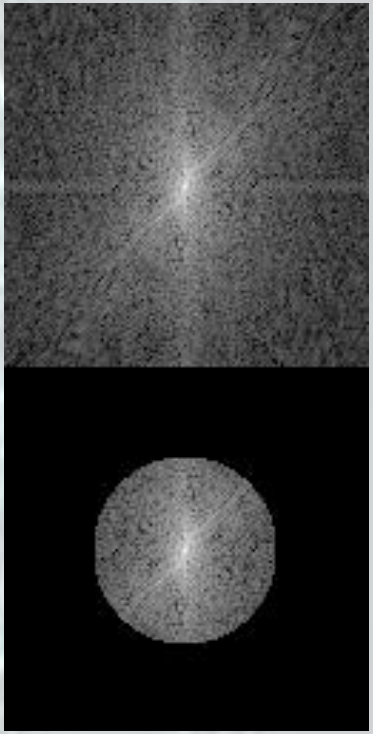
## Modélisation des grandes échelles :

**Théorème de convolution** => Connaissant une fonction filtre dans le domaine fréquentiel, on peut obtenir un filtre correspondant dans le domaine spatial en calculant la transformée de Fourier inverse de cette fonction filtre et vice versa.

$$f * g(x) \rightarrow \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

$$f \cdot g(x) \rightarrow \hat{f}(k) * \hat{g}(k)$$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\chi) e^{-ix\chi} d\chi$$



**Filtre passe-bas idéal** :

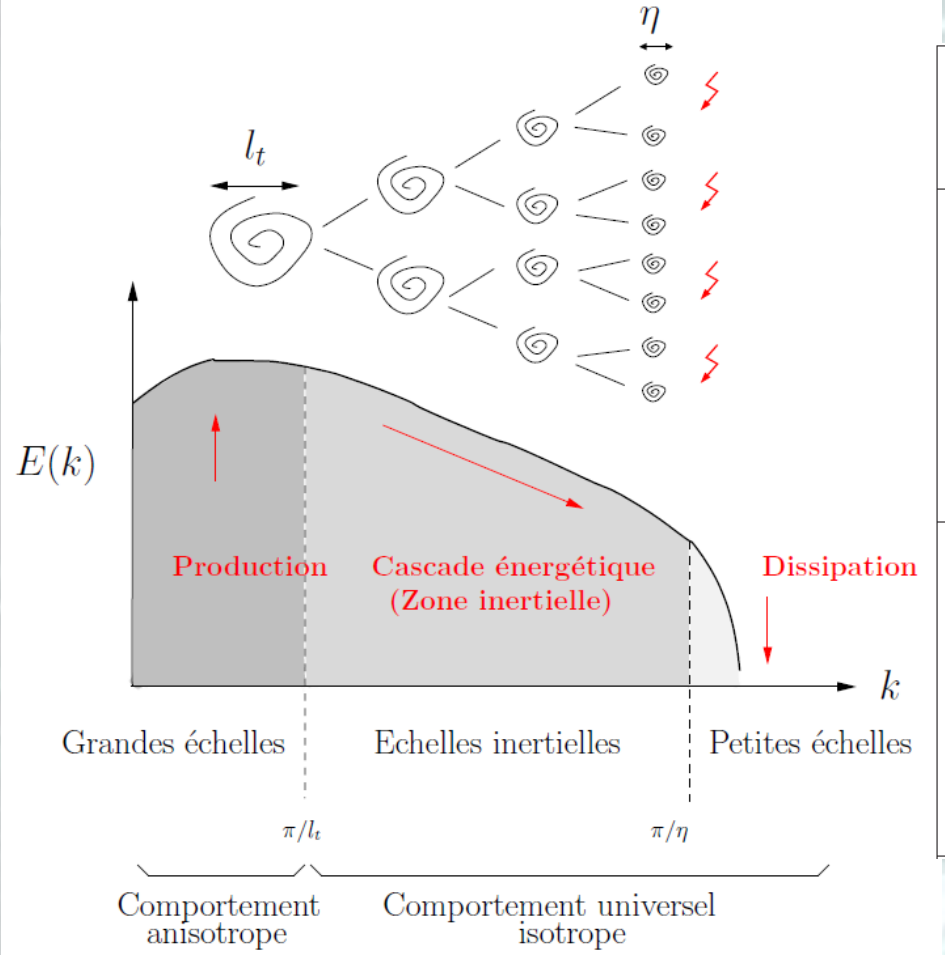
$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \cdot g(t) dt$$

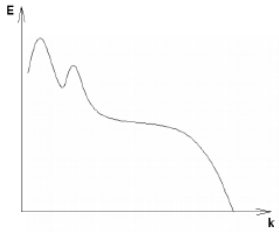
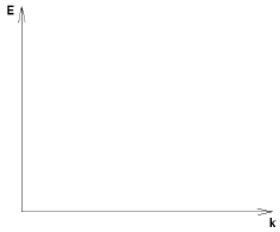
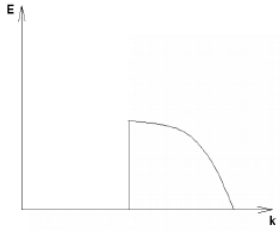
Il coupe toutes les hautes fréquences après une distance $L_C$ du centre, soit

$$G(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad Dist(x,y) \leq L_C \\ 0 & si \quad Dist(x,y) > L_C \end{cases}$$

# Modélisation

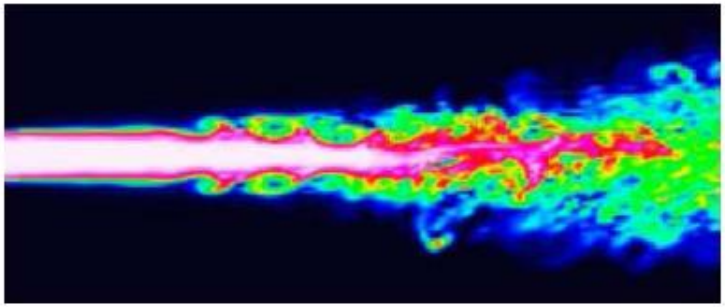
## Modélisation des grandes échelles



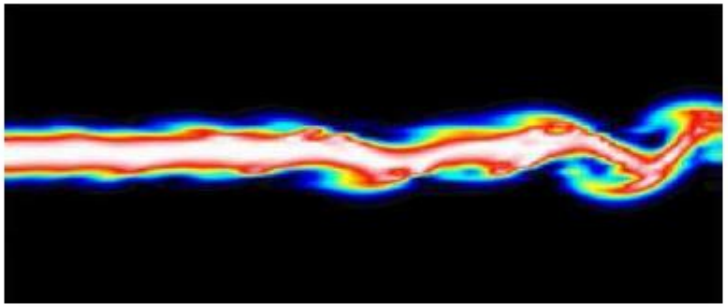

| Modèles de turbulence | Énergie turbulente calculée | Énergie turbulente modélisée |
|---|---|---|
| DNS |  |  |
| LES | |  |

# Modélisation

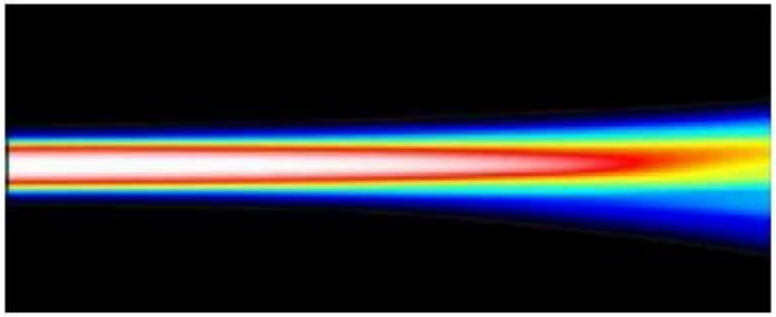
## Comparaison des modélisations



(a) DNS



(b) LES



(c) RANS

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### Notion de filtrage

Le filtrage spatio-temporel (passe-bas en fréquence et passe-haut en échelle) d'une variable f(x,t) est obtenu dans l'espace physique par un produit de convolution entre la fonction f à filtrer et la fonction filtre G(x,t) prédéfinie.

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,t')G(x-y,t-t')dydt' \tag{8.2}$$

On associe à la fonction filtre G(x,t) les échelles de coupure en espace $\overline{\Delta}$ et en temps $\overline{\tau}$. la partie non-résolue de f(x,t), relative aux échelles de sous-maille, et notée f'(x,t), est alors définie dans le domaine physique par :

$$f'(x,t) = \overline{f(x,t)} - f(x,t) \tag{8.3}$$

Le choix du filtre spatial est intrinsèquement lié à la méthode de simulation utilisée. La méthode des volumes de contrôle dans l'espace physique est généralement associée à un filtre type boîte, c'est-à-dire que la valeur au noeud est le résultat d'une intégration sur la maille élémentaire de calcul. En conséquence, toutes les "grosses structures", de taille strictement supérieure à la taille de la maille $\overline{\Delta}$ , que l'on appellera longueur de coupure, sont calculées grâce aux équations de conservation en tout point du maillage. C'est pourquoi seul l'effet des petites structures, non captées par le maillage, sur les grosses sera introduit dans les équations.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### 2.5.4.2 Filtrage des équations

Le filtrage dans le cas homogène des équations de Navier-Stokes (2.14) et de l'énergie (2.66) donne :

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{u}}}{\partial t}+(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}}\right) = \rho\mathbf{g}-\nabla\overline{p}+\nabla\cdot\left(\mu(\nabla\overline{\mathbf{u}}+\nabla^T\overline{\mathbf{u}})\right)-\nabla\cdot\tau \tag{2.97}$$

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}} = 0$$

$$\rho C_p\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}+(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{T}\right) = \nabla\cdot(\lambda\nabla\overline{T})-\nabla\cdot\Pi \tag{2.98}$$

$\overline{p}$, $\overline{\mathbf{u}}$ et $\overline{T}$ sont respectivement la pression, la vitesse et la température filtrées, les nouvelles inconnues du problème. L'effet des petites échelles apparaît sous la forme du tenseur de sous-maille $\tau$. Il doit s'exprimer en fonction de la variable filtrée $\overline{\mathbf{u}}$ et de la vitesse non résolue, composante de sous-maille $\mathbf{u}'$.

Le tenseur de contrainte de sous-maille $\tau$ s'exprime ainsi :

$$\tau = \overline{\mathbf{u}}\otimes\overline{\mathbf{u}}-\overline{\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}} \tag{2.99}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

Il peut aussi s'exprimer en utilisant la convention d'Einstein sur les indices répétés, avec i et j égaux à 1, 2, 3.

$$\tau_{ij} = \overline{u_i}\,\overline{u_j} - \overline{u_i u_j} \tag{2.100}$$

Les composantes du vecteur de flux de sous-maille $\Pi$ s'expriment ainsi :

$$\Pi_{jT} = \overline{u_j}\,\overline{T} - \overline{u_j T} \tag{2.101}$$

La décomposition de ce terme non linéaire $\overline{u_i u_j}$ a été réalisée par Leonard [Leonard 74].

Leonard décompose le terme non-linéaire sous la forme d'une triple sommation faisant apparaître la quantité filtrée $\overline{u}$ et la fluctuation $u'$ :

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u}_i + u'_i)(\overline{u}_j + u'_j)} \quad (2.102)$$

$$= \overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} + \overline{\overline{u}_i u'_j} + \overline{\overline{u}_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j} \quad (2.103)$$

Cependant, le terme $\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j}$ ne peut être calculé directement car il requiert une seconde application du filtre. Leonard propose la décomposition suivante :

$$\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} = (\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j) + \overline{u}_i \overline{u}_j \quad (2.104)$$

$$= L_{ij} + \overline{u}_i \overline{u}_j \quad (2.105)$$

Ainsi, le terme non-linéaire se décompose en faisant apparaître 3 tenseurs :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u}_i \overline{u}_j + (\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j) + (\overline{\overline{u}_i u'_j} + \overline{\overline{u}_j u'_i}) + \overline{u'_i u'_j} \quad (2.106)$$

$$\text{soit} \quad \overline{u_i u_j} = \overline{u}_i \overline{u}_j + L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (2.107)$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

Ces trois tenseurs $L_{ij}$, $C_{ij}$ et $R_{ij}$ bien distincts contribuent de manière différente au mouvement des échelles résolues.

- Le tenseur de Leonard ne fait apparaître que les échelles résolues, il peut a priori être calculé explicitement.

$$L_{ij} = (\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j) \tag{2.108}$$

- Le tenseur croisé représente les interactions entre grandes et petites échelles. Il doit être modélisé.

$$C_{ij} = \overline{\overline{u}_i u'_j} + \overline{\overline{u}_j u'_i} \tag{2.109}$$

- Le tenseur de Reynolds de sous-maille représente les effets macroscopiques des interactions entre échelles de sous-maille. Il nécessite également d'être modélisé.

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \tag{2.110}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

Deux versions existent pour établir le tenseur de sous-maille et des équations associées [Winckelmans 96].

– La double décomposition.

Tous les termes apparaissant dans les équations d'une quantité filtrée doivent être eux-mêmes des quantités filtrées, la solution devant être la même pour tous les termes. L'équation de quantité de mouvement filtrée s'exprime ainsi :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\overline{u}_i \overline{u}_j}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.111}$$

Le tenseur de sous-maille $\tau$ regroupe tous les termes qui ne sont pas exclusivement dépendant des grandes échelles :

$$\tau_{ij} = C_{ij} + R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} \tag{2.112}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

– Décomposition de Leonard ou décomposition triple.

La deuxième approche suppose que tous les termes présents dans l'équation de quantité de mouvement doivent pouvoir s'exprimer directement à partir des variables filtrées. Ainsi, l'équation de la quantité de mouvement filtrée est :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.113}$$

Le tenseur de sous-maille $\tau$ regroupe tous les termes qui ne sont pas exprimés directement à partir de $\overline{u}$ et s'exprime sous la forme d'un triple somme d'où la terminologie de décomposition triple :

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \tag{2.114}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

Initialement, Leonard [Leonard 74] suggérait que le terme $L_{ij}$ était responsable d'un tiers de la dissipation d'énergie des grandes échelles. Certains auteurs ont calculé ce terme explicitement. Moin et Kim [Moin 82] appliquent un filtre explicite dans les deux directions où une méthode pseudo-spectrale est employée. Dans la troisième direction non homogène, le filtre implicite de maille est utilisé. Certains auteurs choisissent de modéliser ce terme ainsi que le tenseur croisé [Kwak 75] [Clark 79] [Germano 86] en utilisant des développements de Taylor et un opérateur de Laplace :

$$L_{ij} = \frac{1}{24}\Delta^2\nabla^2(\overline{u}_i\overline{u}_j) + \mathcal{O}(\Delta^4) \tag{2.115}$$

Cette approche reste moins précise que le calcul explicite de ces différents termes.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

On exprime les équations de Navier-Stokes sous forme compacte :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{NS}(\mathbf{u}) \tag{2.116}$$

et leur filtrage donne :

$$G \star \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} = G \star \mathcal{NS}(\mathbf{u}) \tag{2.117}$$

$$= \mathcal{NS}(\overline{\mathbf{u}}) + [G\star, \mathcal{NS}](\mathbf{u}) \tag{2.118}$$

Le tenseur de sous-maille correspond à l'erreur de commutation entre le filtre et le terme non-linéaire. En introduisant la forme bilinéaire B(.,.).

$$B(u_i, u_j) \equiv u_i u_j \tag{2.119}$$

on obtient :

$$\tau_{ij} = [G\star, B](u_i, u_j) \tag{2.120}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

Nous nous en tiendrons ici à la décomposition de Leonard. Appliquée à l'énergie cinétique résolue $q_r^2 = (\overline{u}_i\overline{u}_j)/2$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial {q_r}^2}{\partial t} = & -\frac{\partial q_r^2\overline{u}_j}{\partial x_j} + \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \nu\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \\ & -\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u}_i\overline{p}) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial q_r^2}{\partial x_i}\right) \\ & +\overline{u}_i\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\tau_{ij}) \qquad (2.121)\end{aligned}$$

Cette équation montre l'existence de mécanismes échangeant l'énergie cinétique aux échelles résolues. On identifie les différents termes de cette équation par des lettres :

$$\frac{\partial q_r^2}{\partial t} = - A + B - C \qquad (2.122)$$

$$- D + E$$

$$+ F - G \qquad (2.123)$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

On regroupe dans le tableau 2.2 la signification des différents termes.

| Termes | Signification |
|---|---|
| A | advection |
| B | dissipation de sous-maille |
| C | dissipation par effets visqueux |
| D | diffusion par effets de pression |
| E | diffusion par effets visqueux |
| F | production |
| G | diffusion par interaction avec les modes sous-maille |

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

L'équation de la quantité de mouvement pour les petites échelles est obtenue en retranchant l'équation aux grandes échelles de l'équation de la quantité de mouvement non filtrée :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}((\overline{u}_i + u'_i) + (\overline{u}_j + u'_j) - \overline{u}_i\overline{u}_j - \tau_{ij}) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.124)$$

L'équation de l'énergie cinétique de sous-maille $q^2_{sm} = \overline{u'_k u'_k}/2$ obtenue en multipliant par $u'_i$ la relation (2.124) et en filtrant la relation obtenue s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^2_{sm}}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_j}(q^2_{sm}\overline{u}_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_i u_j}) - \overline{u}_j\overline{u_i u_i}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p u_j} - \overline{p}\,\overline{u}_j) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial q^2_{sm}}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}\overline{u}_i) \\ & -\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right) - \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^2_{sm}}{\partial t} = & -H - I - J \\ & +K + L \\ & -M - N\end{aligned} \quad (2.126)$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

| Termes | Signification |
|---|---|
| H | advection |
| I | transport turbulent |
| J | diffusion par effets de pression |
| K | diffusion par effets visqueux |
| L | diffusion par les modes sous-maille |
| M | dissipation par effets visqueux |
| N | dissipation sous-maille |

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : enstrophie/vorticité

$$E_r(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 dV = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (\nabla \times \mathbf{u})^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} - 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= (\nabla \times \mathbf{u})^2 \quad si\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : dissipation

$$\bar{\bar{\sigma}} = \mu\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}\right] + \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\bar{\bar{I}} = 2\mu\bar{\bar{S}} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\bar{\bar{I}}$$

$$\Phi^1 = \left(\mu\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}\right] + \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\bar{\bar{I}}\right):\nabla\mathbf{u} = \left(\mu\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}\right] - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}\bar{\bar{I}}\right):\nabla\mathbf{u}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^1 = \bar{\bar{\sigma}}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\bar{\bar{G}} &= \sigma^{ij}\left(\delta_i \otimes \delta_j\right)\bar{\bar{\otimes}}\, G_{kl}\left(\delta^k \otimes \delta^l\right) \\
&= \sigma^{ij} G_{kl}\left(\delta_i \otimes \delta_j\, \bar{\bar{\otimes}}\, \delta^k \otimes \delta^l\right) \\
&= \sigma^{ij} G_{kl}\left(\delta_i \otimes \delta_j : \delta^k \otimes \delta^l\right) \\
&= \sigma^{ij} G_{kl}\delta_j^k\left(\delta_i \cdot \delta^l\right) \\
&= \sigma^{ij} G_{kl}\delta_j^k\delta_i^l \\
&= \sigma^{ij} G_{jl}\delta_i^l \\
&= \sigma^{ij} G_{ji}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}\nabla\cdot\vec{u} + \mu\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \mu\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
&+ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y}\nabla\cdot\vec{u} + \mu\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\
&+ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \mu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \mu\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial w}{\partial z}\nabla\cdot\vec{u} \\
&= 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 + \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right]^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)^2
\end{aligned}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : dissipation

$$\Phi^2 = \frac{\mu}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}\right)\vdots\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}\right) = 2\mu S_{ij}S_{ij}$$

$$= 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 + \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right]^2$$

$$\Phi^1 = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 + \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right]^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)^2$$

## Si écoulement incompressible

$$\Phi^1 = \Phi^2$$

$$2\mu S_{ij}S_{ij} = \left(\mu\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}\right] - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}\bar{\bar{I}}\right)\vdots\nabla\mathbf{u}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### 2.5.4.3 Modélisation de sous-maille

Le système composé des équations de Navier-Stokes filtrées est formellement similaire au système obtenu en moyennant les équations non filtrées par la décomposition de Reynolds. Les termes de sous-maille apparaissant traduisent les effets des échelles non résolues sur le champ filtré. Les variables résolues doivent être reliées aux variables sous-maille pour fermer le système. Ceci est réalisé via un modèle appelé modèle de sous-maille. Le rôle de ce modèle est de fournir aux échelles résolues les informations contenues dans les échelles de sous-maille.

Deux modélisations se dégagent, la modélisation structurelle et la modélisation fonctionnelle. La modélisation structurelle repose sur la connaissance de la structure des petites échelles de sous-maille afin de déterminer des relations qui existent entre les champs résolus et non résolus. On cherche à modéliser directement les termes de sous-maille. La modélisation fonctionnelle repose sur la connaissance de la nature des interactions entre les structures à différentes échelles. On se concentre ici davantage sur la modélisation des interactions, notamment de l'action des termes de sous-maille sur les termes résolus.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### Equations de conservation filtrées dans l'espace physique

Les équations constitutives de la simulation des grandes échelles dans l''espace physique sont donc obtenues en appliquant un filtre spatial aux équations du mouvements et de l'énergie :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \tag{8.4}$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\nu\Big(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\Big)\Big) \tag{8.5}$$

Le terme non linéaire $\overline{u_i u_j}$ apparu après filtrage est alors à exprimer en fonction des variables filtrées. Pour ce faire, on définit alors le tenseur des contraintes de sous-maille $\tau_{ij}$ de la façon suivante :

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\,\overline{u_j} \tag{8.6}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p*}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\nu\Big(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\Big)\Big) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{8.7}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

où

- $p* = \overline{p} + \frac{1}{3}\tau_{ij}$ est la pression modifiée
- $\tau_{ij}$ est la composante du tenseur des contraintes de sous-maille

Les informations liées aux petites échelles étant perdues, tous les termes traduisant l'effet des quantités sont regroupés dans le terme $\tau_{ij}$. Ce terme représente les interactions entre échelles résolues et échelles de sous-maille.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### 8.4.3 Modélisation de sous-maille

Afin de modéliser les termes de sous-maille, la quasi-totalité des modèles existants fait appel au concept de viscosité turbulente, les modèles se différenciant en fait essentiellement par la manière de formuler cette viscosité , ou par la manière de compléter cette viscosité par un terme de nature différente. Lorsque la viscosité de sous-maille $\nu_{sm}$ est introduite, on a alors :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p*}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((\nu + \nu_t)\Big(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\Big)\Big) \tag{8.8}$$

Le terme inconnu $\tau_{ij}$ a alors été remplacé par :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{ij}\delta_{ij} = -\nu_{sm}\Big(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\Big) \tag{8.9}$$

On se débarrasse alors de la trace de $\tau_{ij}$ en l'absorbant dans le terme de pression qui se trouve modifié, noté $\overline{p*}$. Il ne reste plus qu'à modéliser la viscosité $\nu_{sm}$. Dans les modèles présentés par la suite, la longueur $\overline{\Delta}$ est choisie comme :

$$\overline{\Delta} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}} \tag{8.10}$$

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### Le modèle de Smagorinsky

La viscosité de sous-maille est évaluée par :

$$\nu_{sm} = \left(C_s\overline{\Delta}\right)^2\left(\overline{S_{ij}}\,\overline{S_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.11}$$

où $C_s$ est la constante du modèle de Smagorinsky, prise égale à 0,18 dans le cadre de la turbulence homogène isotrope. Elle est ramenée à 0,1 dans le cas d'un écoulement en canal plan. Le problème majeur de ce modèle est qu'il va agir sur l'écoulement dès que le champ de vitesse résolu possède des variations spatiales. Ce modèle est incapable de décrire la transition d'un état laminaire vers un état turbulent. Pire encore, l'écoulement turbulent peut se relaminariser sous l'effet du modèle.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### Le modèle TKE (Turbulent Kinetic Energy)

On cherche à exprimer la viscosité $\nu_{sm}$ en fonction de la longueur de coupure $\overline{\Delta}$, de l'énergie cinétique des échelles de sous-maille $q_{sm}^2$. L'énergie cinétique de sous-maille est supposée être égale à l'énergie cinétique à la coupure $q_c^2$ :

$$q_{sm}^2 \equiv q_c^2 = \frac{1}{2}(\overline{u_i}')(\overline{u_i}') \tag{8.12}$$

où la vitesse à la coupure $(\overline{u_i}')$ peut être évaluée grâce à un double filtrage des échelles résolues, $(\tilde{.})$ étant un filtre test :

$$(\overline{u_i}') = \overline{u_i} - \tilde{\overline{u_i}} \tag{8.13}$$

Donc :

$$\nu_{sm} = C_{TKE}\overline{\Delta}(q_{sm}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{8.14}$$

La constante $C_{TKE}$ est généralement prise égale à 0,2. Ce modèle s'annule par construction dans les zones où la vitesse est évaluée correctement à partir des équations discrètes. Cependant, les échanges d'énergie inter-échelles sont le plus souvent sous-évalués.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### Le modèle d'échelles mixtes

Le modèle d'échelles mixtes est basé sur l'énergie cinétique des plus petites échelles résolues de l'écoulement. La viscosité de sous-maille est évaluée par :

$$\nu_{sm} = C_m \overline{\Delta}^{1+\alpha} \left( \overline{S_{ij}}\, \overline{S_{ij}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (q_{sm}^2)^{\frac{1-\alpha}{2}} \tag{8.15}$$

avec :

- $C_m$ une constante évaluée à partir des valeurs des constantes des modèles de Smagorinsky et TKE, telle que : $C_m = (C_s)^{2\alpha}(C_{TKE})^{1-\alpha}$
- un paramètre $\alpha$ que l'on fait varier de 0 à 1. En général, $\alpha = 0,5$. Si $\alpha = 0$, on retombe sur le modèle TKE, et si $\alpha = 1$, on a le modèle de Smagorinsky.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles

### La fonction de sélection

Une manière d'améliorer les modèles de base présentés est d'employer une fonction de sélection qui est en fait un senseur structurel. Celle-ci est basée sur les fluctuations angulaires du vecteur vorticité $\vec{\omega}$. Le rôle de cette fonction de sélection est de vérifier si l'écoulement est un écoulement turbulent pleinement développé. La valeur seuil de la fluctuation angulaire $\theta$ a été évaluée à 20°. Il ne reste plus qu'à former un produit entre cette fonction de sélection et la viscosité de sous-maille. Il en résulte une fonction sélective du modèle de base considéré :

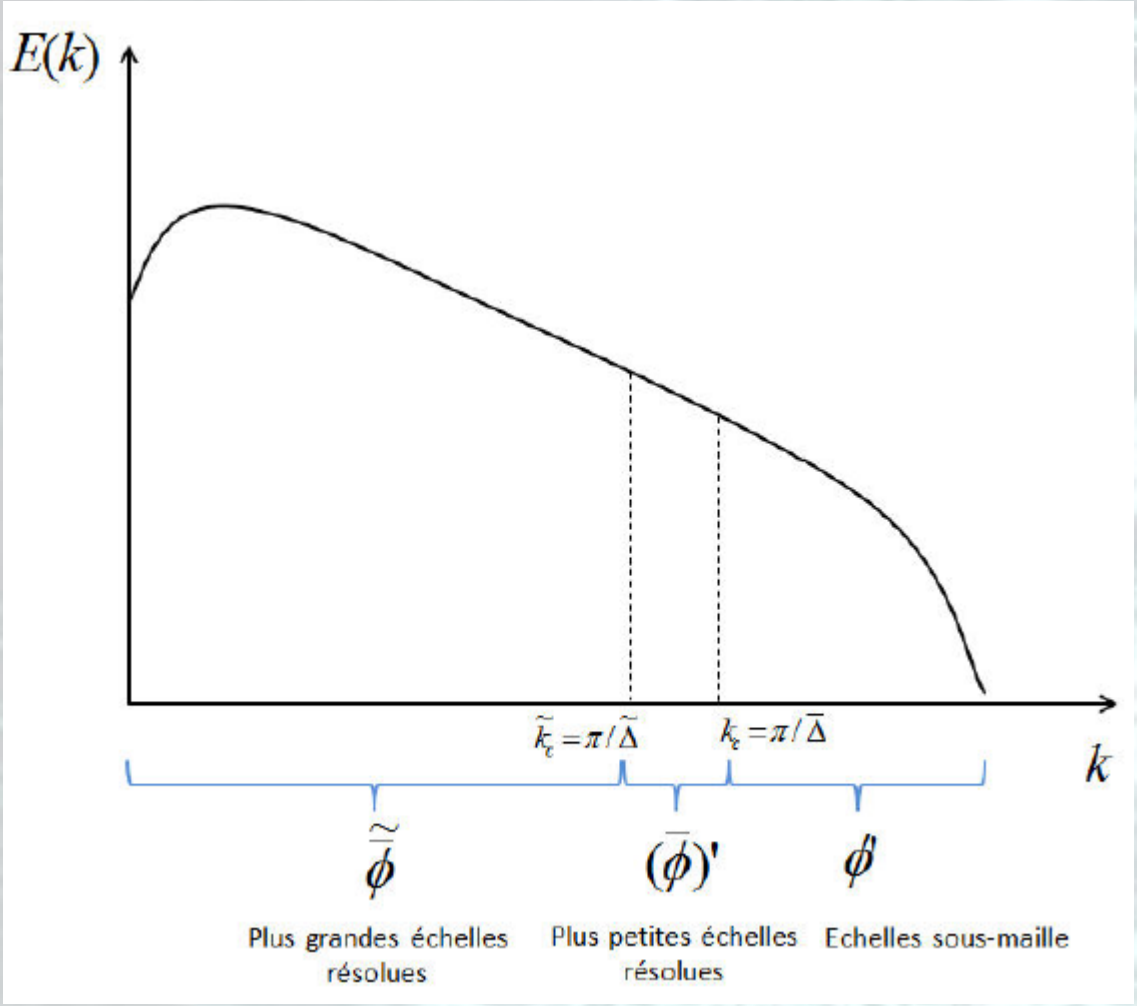
$$\nu_{sm}^{slc} = \nu_{sm} f_s(\theta) \tag{8.16}$$

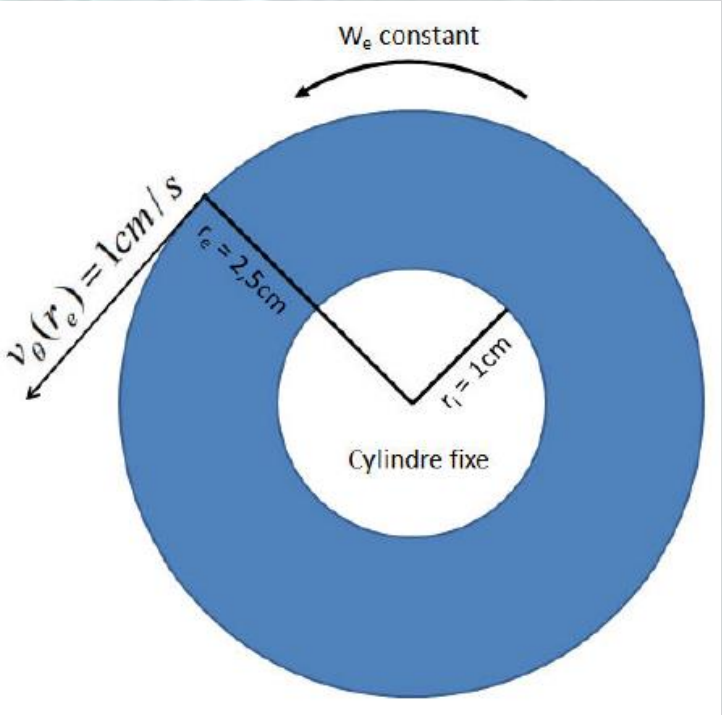
$f_s(\theta)$ faisant office d'"interrupteur".

$$\theta(\mathbf{x}) = \arcsin\left(\frac{\| \tilde{\omega}(\mathbf{x}) \otimes \omega(\mathbf{x}) \|}{\| \tilde{\omega}(\mathbf{x}) \| \cdot \| \omega(\mathbf{x}) \|}\right)$$

# Modélisation

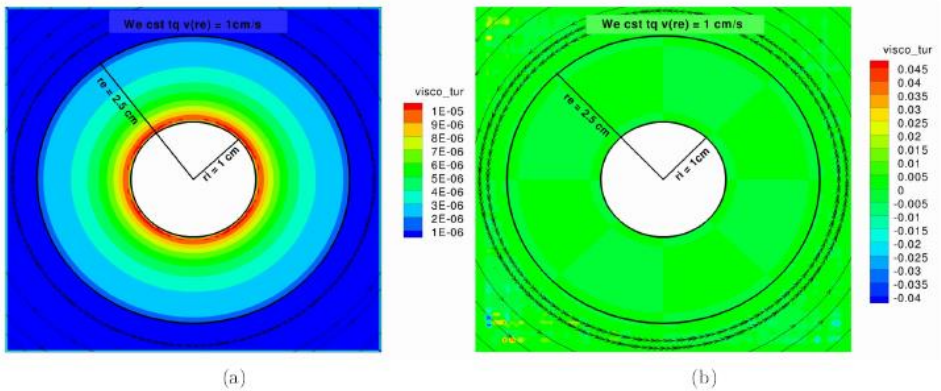
## Modélisation des grandes échelles



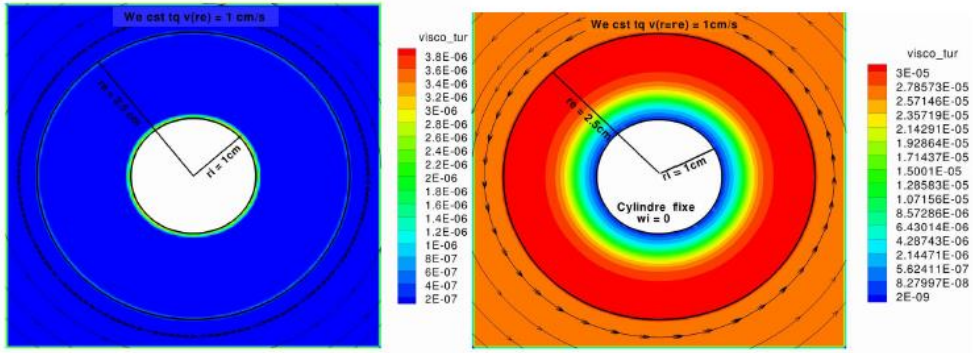
# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : Couette laminaire




(a) (b)

FIGURE 5.2: Viscosité turbulente calculée par le modèle de Smagorinsky 5.2a et par le modèle de Smagorinsky dynamique 5.2b




(a) (b)

FIGURE 5.3: Viscosité turbulente calculée par le modèle d'échelles mixtes 5.3a et par le modèle de WALE 5.3b

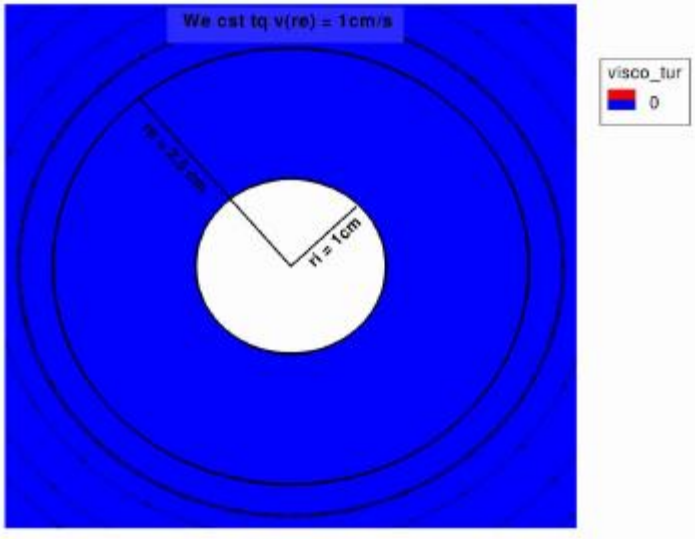



FIGURE 5.4: Viscosité turbulente calculée par le modèle SIGMA

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : Poiseuille laminaire

### 5.3 Ecoulement de Poiseuille

Est considéré ici un écoulement entre deux plaques parallèles situées en $y = (+/-)\frac{H}{/}2$, $H$ étant la hauteur entre les deux plaques. Soit $u_0$ la vitesse maximale atteinte par l'écoulement, la solution analytique est donnée par la relation suivante :

$$u(y) = u_0 \left(1 - \frac{4y^2}{H^2}\right)$$

La vitesse $u_0$ a été fixée ici à la valeur de $1cm/s$.

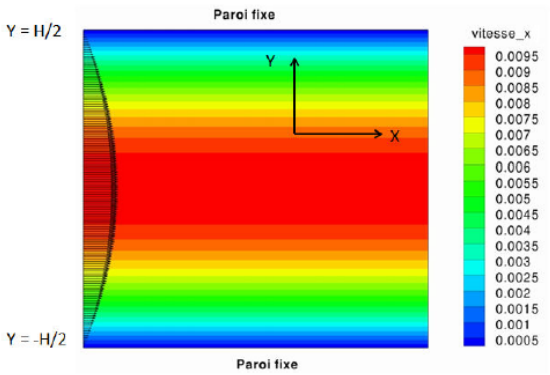
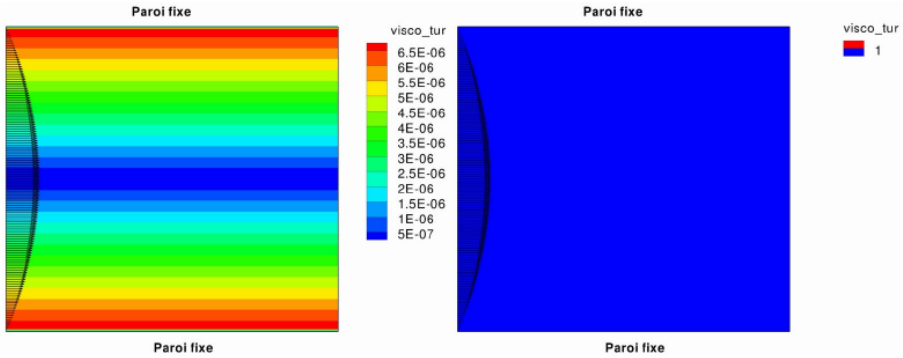
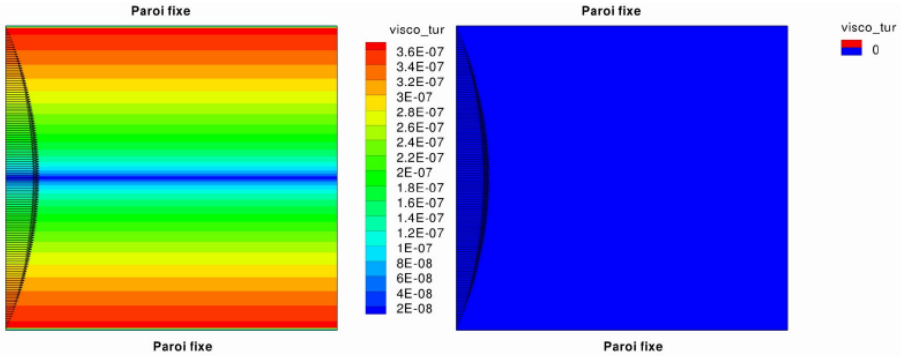



FIGURE 5.9: Ecoulement de Poiseuille




(a) (b)

FIGURE 5.10: Viscosité turbulente calculée par le modèle de Smagorinsky 5.10a et par le modèle de Smagorinsky dynamique 5.10b




(a) (b)

FIGURE 5.11: Viscosité turbulente calculée par le modèle d'échelles mixtes 5.11a et par le modèle de WALE 5.11b

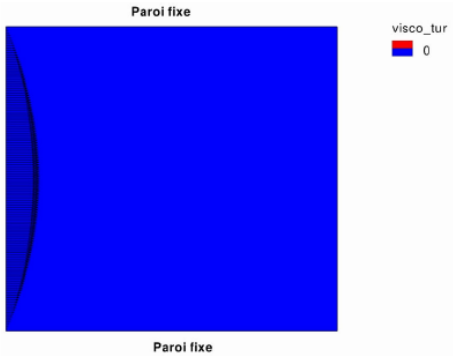



FIGURE 5.12: Viscosité turbulente calculée par le modèle SIGMA

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : canal plan turbulent

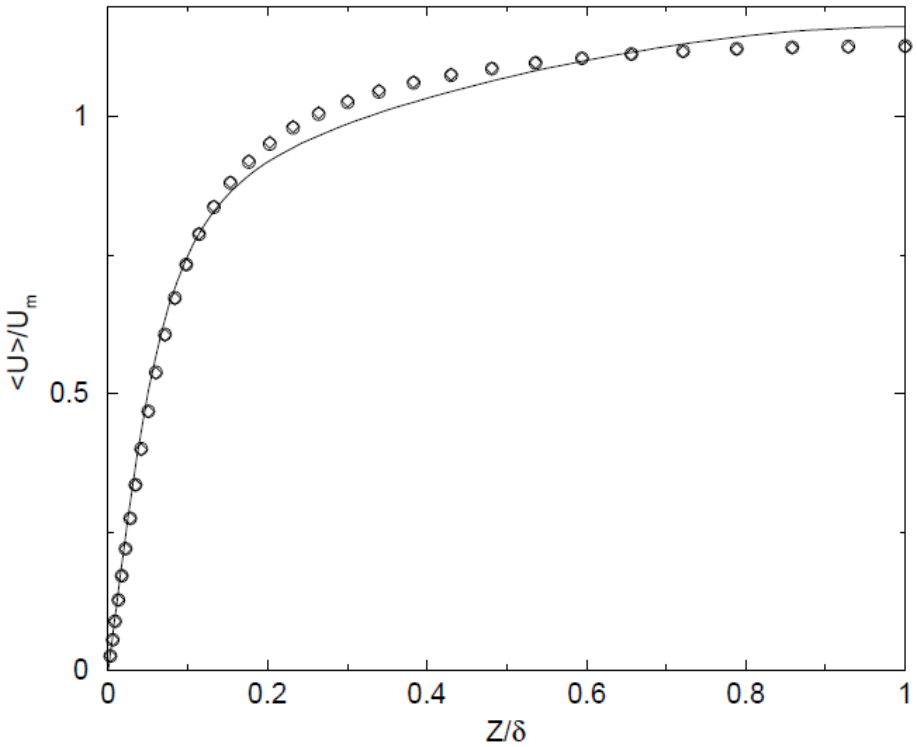



Figure 3.3: Mean velocity profile normalized by the bulk mean velocity as a function of the wall distance normalized by the channel half-height $\delta$. Solid line: DNS (Kim et al., 1987); ◇: SM; ○: MS.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : canal plan turbulent

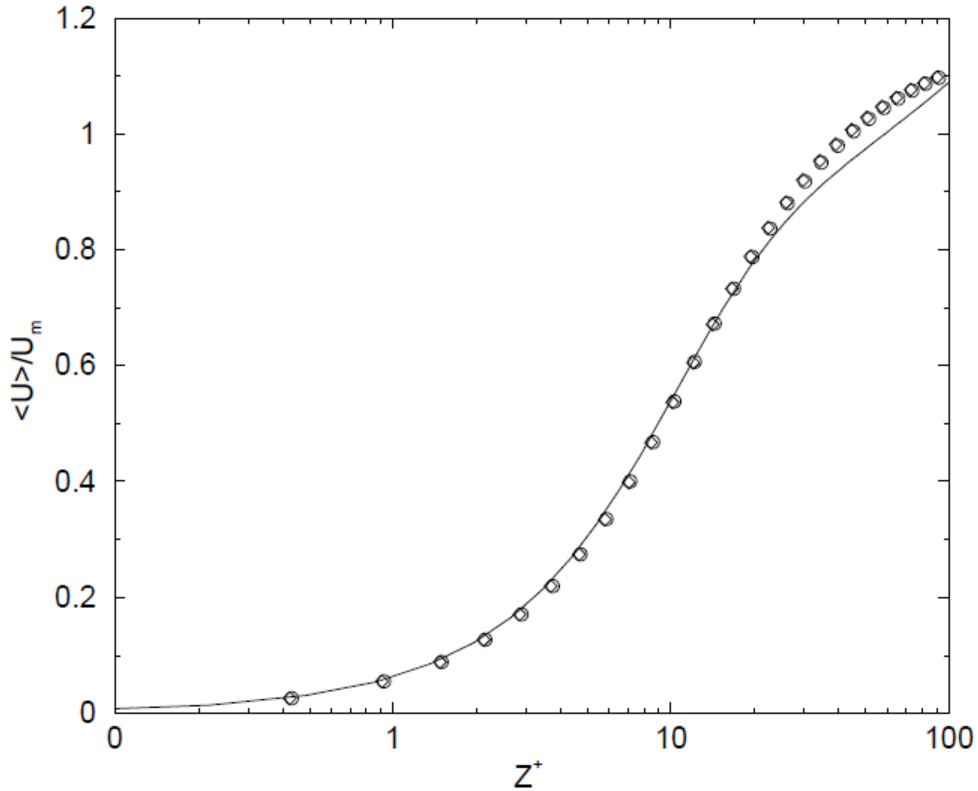



Figure 3.4: Mean velocity profile normalized by the bulk mean velocity as a function of the wall distance $z^+$. Solid line: DNS (Kim et al., 1987); ◇: SM; ○: MS.

# Modélisation

## Modélisation des grandes échelles : canal plan turbulent

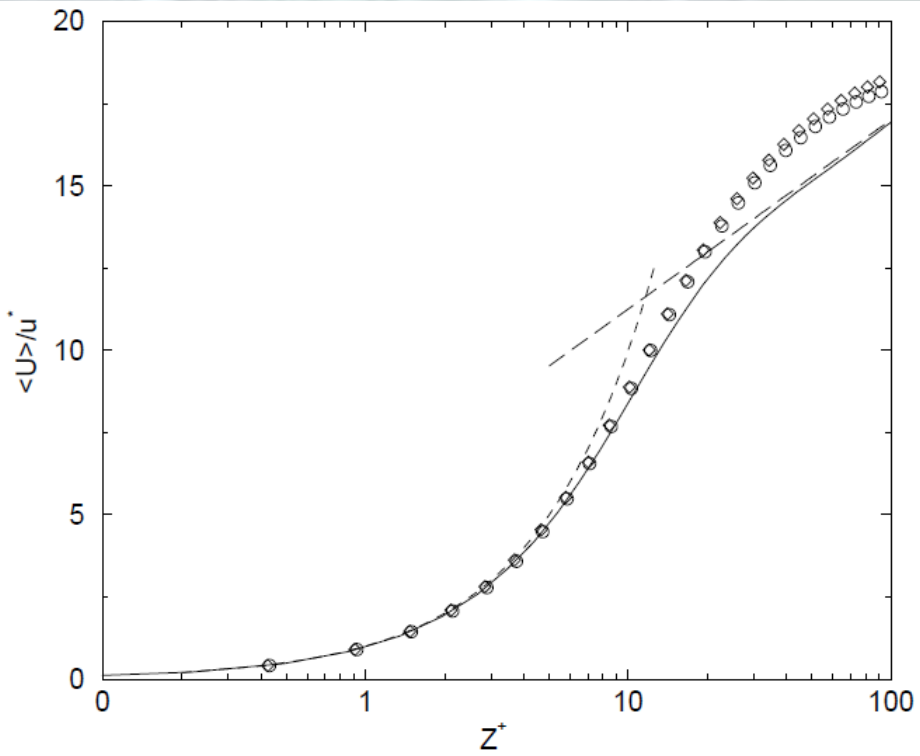



Figure 3.5: Mean velocity profile normalized by the skin friction velocity as a function of the wall distance $z^+$. Solid line: DNS (Kim et al., 1987); ◇: SM; ○: MS; dashed line: $u^+ = z^+$; long-dashed line: $u^+ = 2.5\ \ln(z^+) + 5.5$.